TS - 13 - Probabilités (1) - Exercices en classe - Corrigé

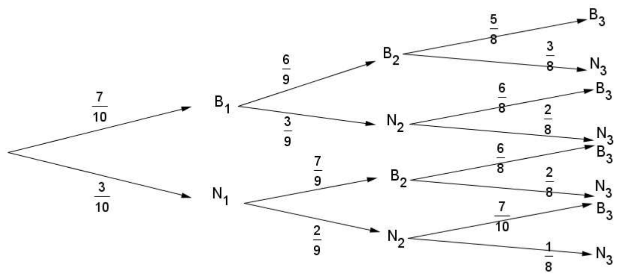
Exercice 1 (Extrait de métropole, juin 2010 - 4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte et à déterminer et à justifier.

1. *Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 sont blanches et 3 sont noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire est égale à*

: • $\frac{21}{40}$ • $\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{1}{3}$ • $\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{1}{3}$

Avec des combinaisons : on cherche la probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire.
il y a $\binom{7}{2}\times\binom{3}{1} = \frac{7\times 6}{2}\times 3 = 63$ façons de choisir les 2 boules blanches et la boule noire.
Il y a $\binom{10}{3} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2} = 120$ façons de choisir 3 boules parmi 10.
$\frac{63}{120} = \frac{21}{40}$. Ainsi la probabilité cherchée est de $\frac{21}{40}$.
Avec un arbre pondéré et des probabilités conditionnelles : Les boules sont indiscernables au toucher.
Chaque boule de l'urne est tirée avec la même probabilité (indépendamment de sa couleur).
On choisit la loi équirépartie et on a alors, pour tout événement A de Ω : $p(A) = \frac{cardA}{card\Omega}$.
On considère que l'on fait 3 tirages successifs sans remise (l'univers change de cardinal à chaque tirage).
La probabilité de tirer une boule blanche au 1er tirage est de $\frac{7}{10}(succès)$ et une boule noire est de $\frac{3}{10}(échec)$.
On a ensuite des probabilités conditionnelles.



Les issues qui réalisent "2 boules blanches et 1 boule noire ont été tirées" sont : $B_1B_2N_3,\ B_1N_2B_3,\ N_1B_2B_3$ donc la probabilité cherchée est déterminée par :
$\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}+\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{6}{8} = \frac{21}{40}$ Ainsi la probabilité cherchée est de $\frac{21}{40}$.

$\boxed{\text{La bonne réponse est donc la première proposition}}$.

2. *De la même urne, on tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs avec remise. La probabilité d'avoir obtenu 3 boules noires et 2 boules blanches est égale à*

: • $\frac{3^3\times 7^2}{10^5}$ • $\binom{5}{2}\times\left(\frac{3}{10}\right)^2\times\left(\frac{7}{10}\right)^3$ • $\binom{5}{2}\times\left(\frac{3}{10}\right)^3\times\left(\frac{7}{10}\right)^2$

En utilisant la loi binomiale. Pour chaque tirage, on a exactement deux issues :
▹ B représentant le succès, de probabilité $p = \frac{7}{10}$
▹ N représentant l'échec
Elle est assimilable à une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
On répète 5 fois de manière **identique** et **indépendante** cette épreuve et on effectue donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{7}{10}$.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de ce schéma alors

$\boxed{X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n = 5 \text{ et } p = \frac{7}{10}}$.

Alors la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 3 boules noires est déterminée par :

$P(X=2) = \binom{5}{2} p^2(1-p)^3 = \binom{5}{2} \times \left(\frac{7}{10}\right)^2 \times \left(\frac{3}{10}\right)^3$ $\boxed{\text{la bonne réponse est donc la troisième proposition}}$.

3. *De la même urne, on tire une seule boule. Si elle est blanche, on lance un dé cubique (dont les faces sont numérotées de 1 à 6). Si la boule est noire, on lance un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). On suppose les dés bien équilibrés. Le joueur gagne s'il obtient le numéro 1.*
Sachant que le joueur a gagné, la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche est égale à

: • $\frac{7}{60}$ • $\frac{14}{23}$ • $\dfrac{\frac{7}{10} \times \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}$

On peut modéliser la situation par un arbre ayant deux générations de branches.
La première génération contient 2 branches (B, pondérée par $\frac{7}{10}$ et $N = \overline{B}$, pondérée par $\frac{3}{10}$),
la deuxième génération contient 6 branches si raccordées à B, pondérées par $\frac{1}{6}$ et 4 branches si raccordées à $\overline{B}$, pondérées par $\frac{1}{4}$ (les dés étant bien équilibrés, on choisit la loi équirépartie). Soit G l'évènement "le joueur gagne".
B et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers donc $G = (B \cap G) \underset{\text{disjointe}}{\cup} \left(\overline{B} \cap G\right)$.

D'après la formule des probabilités totales :
$p(G) = p(B \cap G) + p\left(\overline{B} \cap G\right) = p_B(G) \times p(B) + p_{\overline{B}}(G) \times p\left(\overline{B}\right) = \frac{1}{6} \times \frac{7}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{10} = \frac{23}{120}$

On cherche $p_G(B) = \dfrac{p(B \cap G)}{p(G)} = \dfrac{p_B(G) \times p(B)}{p(G)} = \dfrac{\frac{1}{6} \times \frac{7}{10}}{\frac{23}{120}} = \dfrac{14}{23}$

$\boxed{\text{La bonne réponse est donc la deuxième proposition}}$.

Exercice 2 (La Réunion, juin 2010 - 4 points)

Calculs de probabilités - Indépendance - Probabilités conditionnelles - Formule des probabilités totales

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Partie I

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges. Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1. *Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.*
2. *À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?*

Partie II

On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires. Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;

- *si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;*
- *si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.*

1.
   a. *Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.*
   b. *Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?*
2. *Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\frac{4}{9}$.*
3. *Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?*

Partie I

1. *Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.*
   Comme le dé est équilibré alors on est dans une situtation d'équiprobabilité.
   Pour un lancer, la probabilité d'obtenir une face noire est donc $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
   Comme les deux lancers sont indépendants, la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires est $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{9}}$

2. *Soit l'évènement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».Démontrer que la probabilité de l'évènement C est égale à* $\frac{7}{18}$De même, la probabilité que les deux faces obtenues soient rouges est : $\frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$ et la probabilité que les deux faces obtenues soient vertes est $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

   Comme ces évènements sont incompatibles alors $p(C) = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{36} = \boxed{\frac{7}{18}}$.

3. L'évènement "les deux faces obtenues sont de couleurs différentes" est l'évènement contraire de "les deux faces sont de la même couleur".

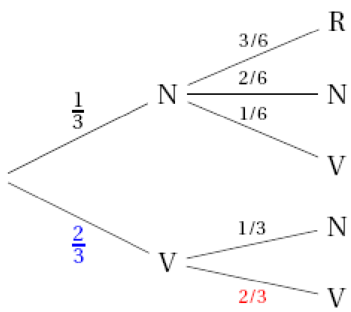
   Sa probabilité est $p\left(\overline{C}\right) = 1 - p(C) = \boxed{\frac{11}{18}}$

4. Soit D l'évènement "les deux faces obtenues sont vertes".

$$p_C(D) = \frac{p(C \cap D)}{p(C)} = \frac{p(D)}{p(C)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{7}{18}} = \boxed{\frac{1}{14}}\ (p(C \cap D) = p(D) \text{ car } D \subset C)$$

Partie II

1. a.



   b. $p_{V_1}(V_2) = \boxed{\frac{2}{3}}$

2. $p(V_1 \cap V_2) = p_{V_1}(V_2) \times p(V_1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{9}}$

3. V_1 et N_1 forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$p(V_2) = p(V_2 \cap V_1) + p(V_2 \cap N_1) = p_{V_1}(V_2) \times p(V_1) + p_{N_1}(V_2) \times p(N_1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Exercice 3 (Amérique du Sud, nov. 2009 - 4 points)

On considère un questionnaire comportant cinq questions. Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A, B et C), une seule d'entre elles étant exacte. Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot «BBAAC» signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1. a. *Combien y-a-t'il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?*

   On compte le nombre de $5 -$ *listes* ordonnées avec répétition de 3 éléments. Il y en a : $3^5 = 243$

   b. *On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.*

   Calculer la probabilité des évènements suivants :

   E : « le candidat a exactement une réponse exacte ». F : « le candidat n'a aucune réponse exacte ».

   G : « le mot-réponse du candidat est un palindrome » (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, «BACAB» est un palindrome).

   On choisit la loi équirépartie. $\forall A \subset \Omega$, on a alors $P(A) = \frac{cardA}{card\Omega}$.

   ▸ On compte le nombre de façons de placer les 4 mauvaises réponses (2 choix possibles) dans le questionnaire *ie* il s'agit de compter les $4 -$ *listes* ordonnées avec répétition de 2 éléments puis on tient compte de la position de la bonne réponse donc on a 5 fois plus de possibilités :

   $CardE = 2^4 \times 5 = 80$. Ainsi $\boxed{p(E) = \frac{80}{243}}$.

   Remarque : on peut aussi traiter cette question ainsi que les suivantes en faisant intervenir la loi binomiale (il y a deux issues à chaque expérience : la réponse est bonne ou mauvaise).

▸ On compte le nombre de façons de placer les 5 mauvaises réponses (2 choix possibles) dans le questionnaire *ie* il s'agit de compter les 5 – *listes* ordonnées avec répétition de 2 éléments :

$CardF = 2^5 = 32$. Ainsi $\boxed{p(F) = \frac{32}{243}}$.

▸ On compte le nombre de façons de placer les 3 premières lettres, les suivantes étant déterminées par symétrie *ie* il s'agit de compter les 3 – *listes* ordonnées avec répétition de 3 éléments :

$CardG = 3^3 = 27$. Ainsi $\boxed{p(G) = \frac{27}{243}}$.

2. *Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.*
On désigne par X le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.

a. *Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \frac{32}{243}$.*

On assimile chaque mot-réponse des 28 élèves à un tirage successif avec remise (deux élèves peuvent proposer le même mot-réponse) ayant exactement deux issues :
F "le candidat n'a aucune réponse exacte" représentant le succès, de probabilité $p = \frac{32}{243}$ et $\overline{F}$ "au moins une réponse est exacte" (à faire dire !!) représentant l'échec. Ce tirage est assimilable à une épreuve de Bernoulli de paramètre p. On répète 28 fois de manière **identique** et **indépendante** cette épreuve et on effectue donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 28$ et $p = \frac{32}{243}$. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de ce schéma donc $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n = 5 \text{ et } p = \frac{7}{10}}$.

b. *Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.*
Il s'agit de calculer $p(X \leq 1) = p(X = 0) + p(X = 1)$

$$p(X \leq 1) = \binom{28}{0} p^0(1-p)^{28} + \binom{28}{1} p^1(1-p)^{27} = \left(1 - \frac{32}{243}\right)^{28} + 28 \times \frac{32}{243} \times \left(1 - \frac{32}{243}\right)^{27}$$

donc $p(X \leq 1) = \left(1 - \frac{32}{243}\right)^{28} + 28 \times \frac{32}{243} \times \left(1 - \frac{32}{243}\right)^{27}$ donc $p(X \leq 1) \approx 0.10$

$\boxed{\text{La probabilité, arrondie à } 10^{-2}\text{, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses est d'environ } 0,10}$.

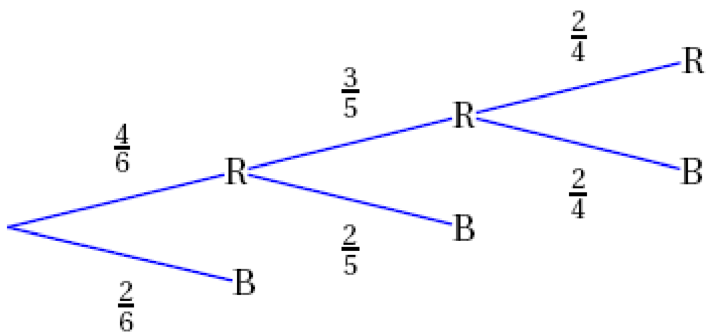
Exercice 4 (La réunion, sept. 2010 - 4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question et la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.
Luc tire au hasard un jeton dans une urne contenant quatre jetons rouges et deux jetons bleus.

• *Si le jeton tiré est bleu. Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, sans remettre dans l'urne le premier jeton tiré, il tire au hasard un deuxième jeton dans l'urne.*

• *Si le deuxième jeton tiré est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, sans remettre dans l'urne les deux jetons précédents, il tire au hasard un troisième jeton dans l'urne.*

• *Si le troisième jeton est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, le jeu s'arrête et Luc a perdu.*



1. *La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du deuxième tirage est :*

• $\frac{19}{15}$ • $\frac{2}{5}$ • $\frac{11}{15}$ • $\frac{4}{15}$

La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du deuxième tirage est : $\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \boxed{\frac{4}{15}}$

2. *La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du troisième tirage est :*

• $\frac{1}{5}$ • $\frac{1}{2}$ • $\frac{2}{15}$ • $\frac{1}{9}$

La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du troisième tirage est : $\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{5}}$

3. *La probabilité que Luc gagne à ce jeu après avoir effectué au moins deux tirages est :*

• $\frac{3}{5}$ • $\frac{4}{15}$ • $\frac{7}{15}$ • $\frac{1}{3}$

La probabilité que Luc gagne à ce jeu après avoir effectué au moins deux tirages est : $\frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \boxed{\frac{7}{15}}$

4. *La probabilité que Luc gagne à ce jeu, sachant qu'il a obtenu un jeton rouge au premier tirage est :*

• $\frac{7}{10}$ • $\frac{7}{15}$ • $\frac{11}{15}$ • $\frac{5}{9}$

La probabilité que Luc gagne à ce jeu, sachant qu'il a obtenu un jeton rouge au premier tirage est :
$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \boxed{\frac{7}{10}}$

Exercice 5 (Centres étrangers - Juin 2009)

ROC - Indépendance - Loi binomiale

1. Restitution organisée de connaissances :

Prérequis : On rappelle que deux évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$. Soient A et B deux évènements associés à une expérience aléatoire

a. Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$

b. Démontrer que, si les évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les évènements $\overline{A}$ et B le sont également.

2. Application : Chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux évènements indépendants :

• R : « il n'entend pas son réveil sonner » ;

• S : « Son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».

Il a observé que chaque jour de classe, la probabilité de R est égale $0,1$ et que celle de S est égale à $0,05$. Lorsque qu'au moins l'un des deux évènements se produit, Stéphane est en retard au lycée sinon il est à l'heure.

a. Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.

b. Calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.

c. Au cours d'une semaine, Stéphane se rend cinq fois au lycée. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants. Quelle est la probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine ? Arrondir le résultat à la quatrième décimale.

ROC - Indépendance - Loi binomiale

1. **a.** Soit Ω l'univers de l'expéreience aléatoire. On a $\Omega = A \cup \overline{A}$

Donc : $p(B) = p(B \cap \Omega) = p\left((B \cap A) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)\right)$

Or les évènements $B \cap A$ et $B \cap \overline{A}$ sont incompatibles donc $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$

b. On suppose que A et B son indépendants (on a donc $p(B \cap A) = p(B) \times p(A)$)
$p\left(B \cap \overline{A}\right) = p(B) - p(B \cap A) = p(B) - p(B) \times p(A) = p(B)(1 - p(A)) = p(B) \times p\left(\overline{A}\right)$
Donc les évènements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

a. Par indépendance : $p\left(\overline{R} \cap S\right) = p\left(\overline{R}\right) \times p(S) = (1 - p(R)) \times p(S) = (1 - 0.1) \times 0.05 = \boxed{0.045}$

b. Par indépendance : $p\left(\overline{R} \cap \overline{S}\right) = p\left(\overline{R}\right) \times p\left(\overline{S}\right) = (1 - p(R))(1 - p(S)) = (1 - 0.1) \times (1 - 0.05) =$ $\boxed{0.855}$

c. On répète 5 fois la même épreuve : se rendre au lycée
Il y a deux issues :
▹ le succès : Stéphane entend son réveil sonner de probabilité 0.9
▹ l'échec : Stéphane n'entend pas son réveil sonner de probabilité 0.1
Les épreuves sont indépendantes. (On a un schéma de Bernoulli)
La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0.9$.
$p(X \geq 4) = p(X = 4) + p(X = 5) = \binom{5}{4} \times 0.9^4 \times 0.1^1 + \binom{5}{5} \times 0.9^5 \times 0.1^0 \approx \boxed{0.9185}$

Exercice 6 - Amérique du Sud , nov. 2010 - 5 points

Un internaute souhaite faire un achat par l'intermédiaire d'internet. Quatre sites de vente, un français, un allemand, un canadien et un indien présentent le matériel qu'il souhaite acquérir. L'expérience a montré que la probabilité qu'il utilise chacun de ces sites vérifie les conditions suivantes (les initiales des pays désignent les évènements « l'achat s'effectue dans le pays ») :
$P(F) = P(A)$, $P(F) = \frac{1}{2}P(C)$ *et* $P(C) = P(I)$.

1) Calculer les quatre probabilités $P(F)$, $P(A)$, $P(C)$ *et* $P(I)$.

2) Sur chacun des quatre sites, l'internaute peut acheter un supplément pour son matériel. Ses expériences précédentes conduisent à formuler ainsi les probabilités conditionnelles de cet évènement, noté S :
$P_F(S) = 0,2$; $P_A(S) = 0,5$; $P_C(S) = 0,1$; $P_I(S) = 0,4$

a) Déterminer $P(S \cap A)$.

b) Montrer que $P(S) = \frac{17}{60}$

c) L'internaute a finalement acheté un supplément. Déterminer la probabilité qu'il l'ait acheté sur le site canadien.

3) Sur 1000 *internautes ayant acheté ce matériel, on a établi la statistique suivante*

	Sites européens	Site canadien	Site indien
Effectif d'acheteurs	335	310	355

a) On note respectivement f_1, f_2 *et* f_3 *les fréquences associées aux effectifs précédents. On pose :*
$$d^2 = \sum_{k=1}^{k=3}\left(f_k - \frac{1}{3}\right)^2$$
Calculer d^2 *puis* $1000\,d^2$.

b) On simule 3000 *fois l'expérience consistant à tirer un nombre au hasard parmi* $\{1 ; 2 ; 3\}$ *avec équiprobabilité. Pour chacune de ces simulations on obtient une valeur de* $1000\,d^2$. *Voici les résultats :*

Minimum	Premier décile	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Neuvième décile	Maximum
0,000 5	0,076 3	0,211 1	0,488 45	0,940 1	1,510 4	5,925 6

Au risque 10 %, *peut-on considérer que le choix d'un site européen, nordaméricain ou asiatique se fait demanière équiprobable ?*